Többváltozós lineáris regresszió

Ortogonális faktorterv alkalmazásával

Példa 1

$$Ysz = X*B \qquad B = (X^T*X)^{-1}*(X^T*Y)$$

		x_1	x_2		y
	1	0	5		16,6
	1	150	10		25,7
X =	1	300	20	Y =	28,5
	1	450	40		29,7
	1	600	80		26,8

Hatások keverednek – nem független a paraméterek becslése

X^T*X		
5	1500	155
1500	675000	73500
155	73500	8525

$(X^T*X)^{-1}$		
0,65208	-0,00258	0,01042
-0,00258	0,00003	-0,00025
0,01042	-0,00025	0,00208

$$y = b_0 + b_1 * x_1 + b_2 * x_2$$

$$\mathbf{Ysz = X*B}$$

$$\mathbf{B = (X^T*X)^{-1}*(X^T*Y)}$$

	x0	x1	x2		y
	1	1	1		27,0
	1	-1	1		31,0
X =	1	1	-1	Y =	19,0
	1	-1	-1		23,0

Hatások nem keverednek – független a paraméterek becslése

$\mathbf{X^T*X}$		
4	0	0
0	4	0
0	0	4

$\mathbf{(X^T*X)^{-1}}$		
0,25	0,00	0,00
0,00	0,25	0,00
0,00	0,00	0,25

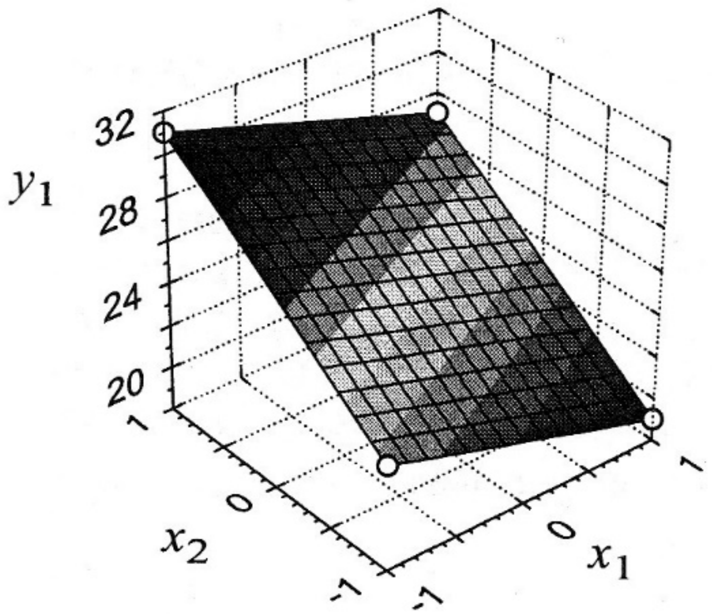
$$y = b_0 + b_1 * x_1 + b_2 * x_2$$

$$\mathbf{Ysz = X * B}$$

$$\mathbf{B = (X^T * X)^{-1} * (X^T * Y)}$$

	x0	x1	x2		y
	1	1	1		27,0
	1	-1	1		31,0
X =	1	1	-1	Y =	19,0
	1	-1	-1		23,0

	25	b0
B =	-2	b1
	4	b2



a) $\hat{Y}_1 = 25 - 2x_1 + 4x_2$

Kemény-Deák:Kísérletek tervezése és értékelése 2002 Műszaki Könyvkiadó

Számolás egyszerűbben

	X^T					X	
1	1	1	1		1	1	1
1	-1	1	-1	*	1	-1	1
1	1	-1	-1		1	1	-1
					1	-1	-1

	x0*y	x1*y	x2*y
	27,0	27,0	27,0
	31,0	-31,0	31,0
	19,0	19,0	-19,0
	23,0	-23,0	-23,0
átlag:	25,0	-2,0	4,0
	b0	b1	b2

	1+1+1+1	1-1+1-1	1+1-1-1		**4**	0	0
X^T*X =	1-1+1-1	1+1+1+1	1-1-1+1	=	0	**4**	0
	1-1+1-1	1-1-1+1	1+1+1+1		0	0	**4**

diagonális mátrix

	$(X^T*X)^{-1}$	
0,25	0	0
0	0,25	0
0	0	0,25

diagonális mátrix

X^T*Y			X^T				Y
100		1	1	1	1		27,0
-8	=	1	-1	1	-1	*	31,0
16		1	1	-1	-1		19,0
							23,0

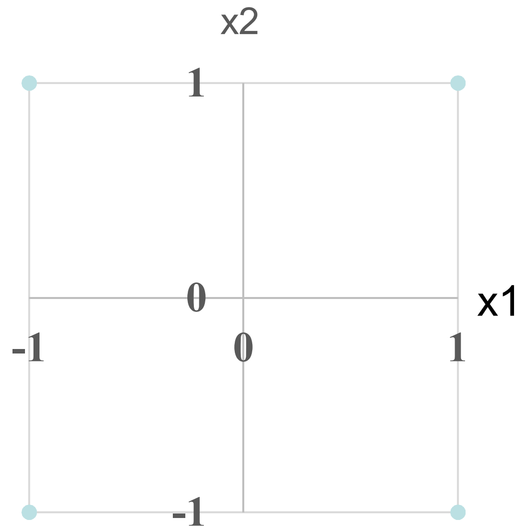
Jó tulajdonságok: Ortogonális faktorterv

Hatások nem keverednek – független a paraméterek becslése
Egyszerű számolás

Ortonormált kísérleti terv x1, x2 : faktorok
Az oszlopvektorok ortogonálisak – vektoriális szorzatuk = 0

	x0	x1	x2
	1	1	1
	1	-1	1
X =	1	1	-1
	1	-1	-1

x0 * x1 = 0
x0 * x2 = 0
x1 * x2 = 0



négyzet-csúcspontok

Ortogonális, normált faktorok vizsgált változók

	közép	0	0	alapszint	25	100	
	x0	x1	x2		Cu kg/ha	N kg/ha	Burgonya t/ha
	1	1	1		50	150	27,0
X =	1	-1	1		0	150	31,0
	1	1	-1		50	50	19,0
	1	-1	-1		0	50	23,0

Konverzió oda vissza

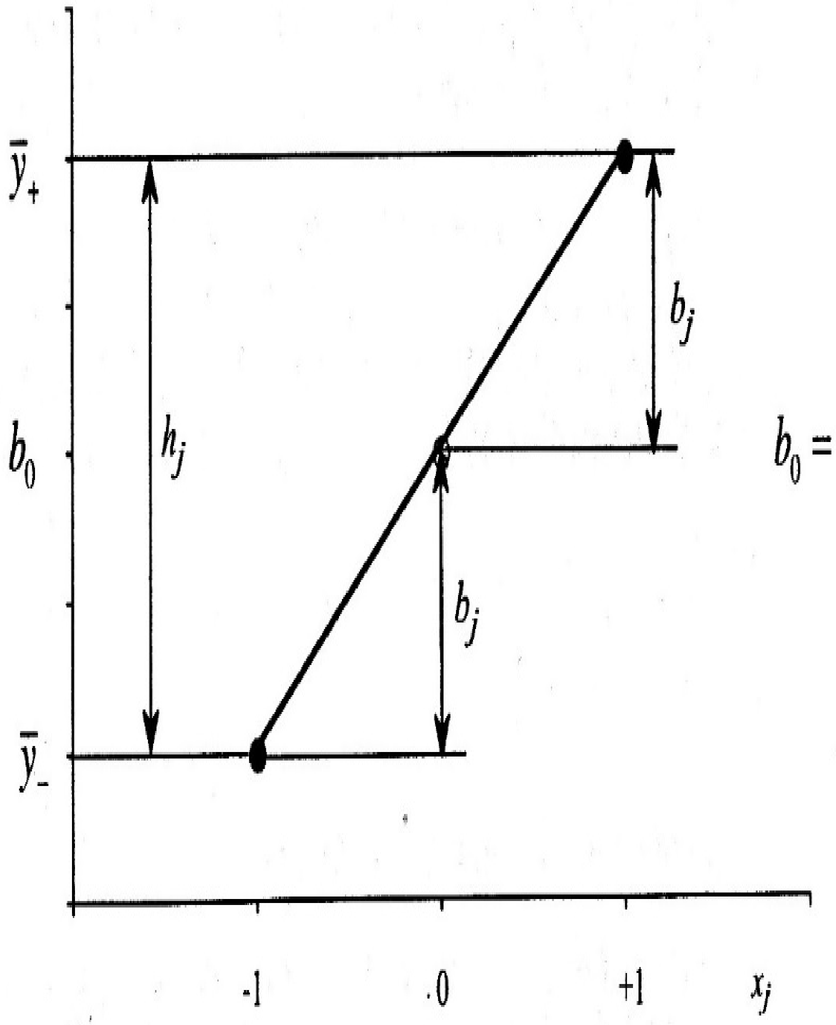
x1 = 1 = (50-25)/(50-25) Cu = 25 + x1*(50-25)

x1 = -1 = (0-25)/(50-25)

x2 = 1 = (150-100)/(150-100) N = 100 + x2*(150-100)

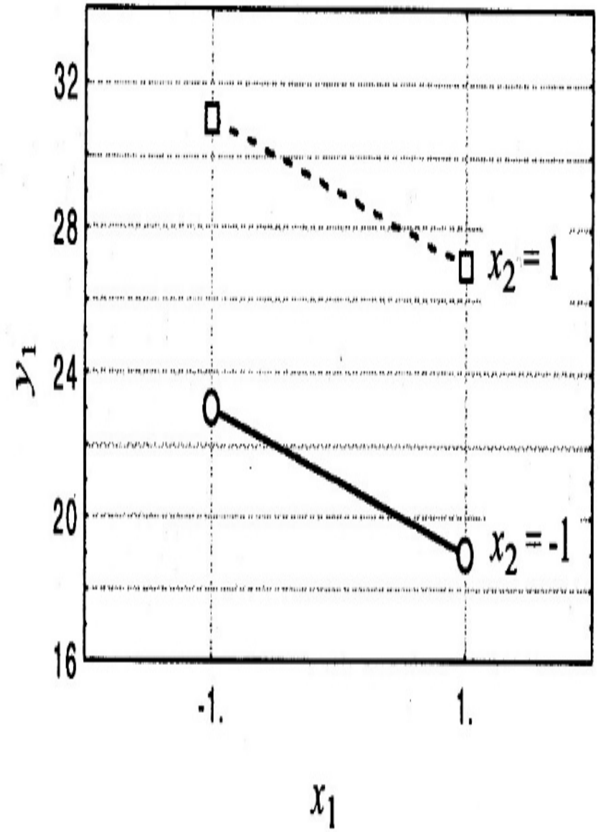
x2 = -1 = (50-100)/(150-100)

A x1 hatás-egyenesek párhuzamosak az x2 két szintjén
NINCS KÖLCSÖNHATÁS



$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$$

20-2. ábra. A faktor hatásának és együtthatójának kapcsolata



20-4. ábra. A faktorok kölcsönhatása a 20-1. példában, a célfüggvény: y_1

Kemény-Deák:Kísérletek tervezése és értékelése 2002 Műszaki Könyvkiadó

Példa 2

$$Ysz = X*B$$

$$y = b_0 + b_1*x_1 + b_2*x_2 + b_{12}*x_1*x_2$$

$$B = (X^T*X)^{-1}*(X^T*Y)$$

		x1	x2	x1*x2			y
	1	1	1	1			32,0
X =	1	-1	1	-1		Y =	30,0
	1	1	-1	-1			12,0
	1	-1	-1	1			26,0

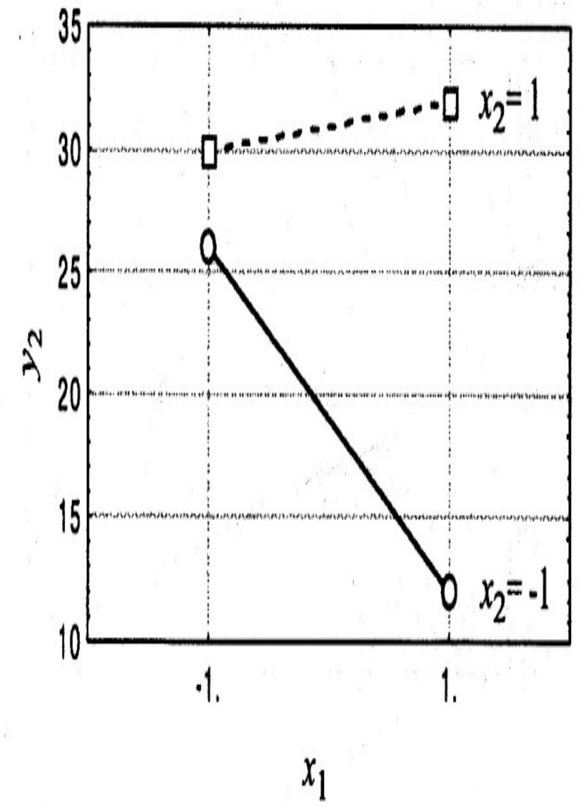
Hatások nem keverednek – független a paraméterek becslése

X^T*X			
4	0	0	0
0	4	0	0
0	0	4	0
0	0	0	4

$(X^T*X)^{-1}$			
0,25	0	0	0
0	0,25	0	0
0	0	0,25	0
0	0	0	0,25

A x1 hatás-egyenesek nem párhuzamosak az x2 két szintjén

VAN KÖLCSÖNHATÁS



20-6. ábra. A faktorok kölcsönhatása a 20-1. példában, a célfüggvény: y_2

	x0	x1	x2	x12 x1*x2	
					x0 * x1 = 0
	1	1	1	1	x0 * x2 = 0
X =	1	-1	1	-1	x0 * x12 = 0
	1	1	-1	-1	x1 * x2 = 0
	1	-1	-1	1	x1 * x12 = 0
					x2 * x12 = 0

Az ortogonalitás a kölcsönhatás (x1*x2) oszlopvektorra is fenn áll

vektoriális szorzatuk = 0

Kemény-Deák:Kísérletek tervezése és értékelése 2002 Műszaki Könyvkiadó

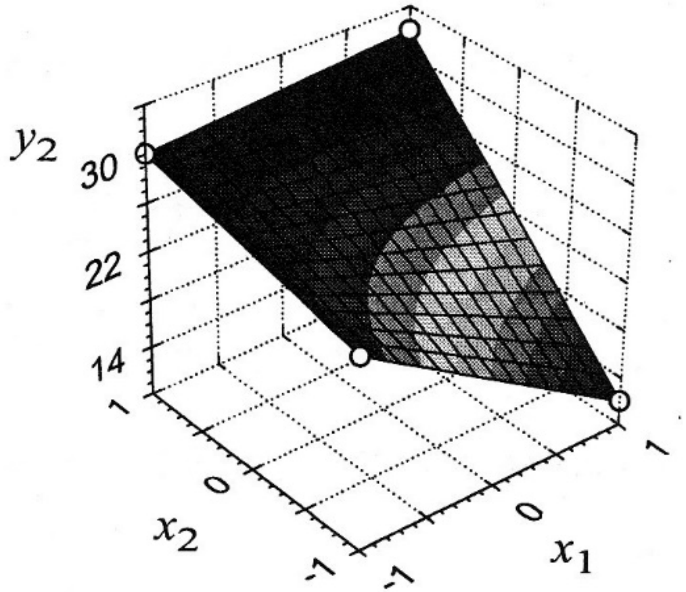
$$Ysz = X*B$$

$$y = b_0 + b_1*x_1 + b_2*x_2 + b_{12}*x_1*x_2$$

$$B = (X^T*X)^{-1}*(X^T*Y)$$

		x1	x2	x1*x2			y
	1	1	1	1			32,0
X =	1	-1	1	-1		Y =	30,0
	1	1	-1	-1			12,0
	1	-1	-1	1			26,0

	25	b0
B =	-3	b1
	6	b2
	4	b1*b2



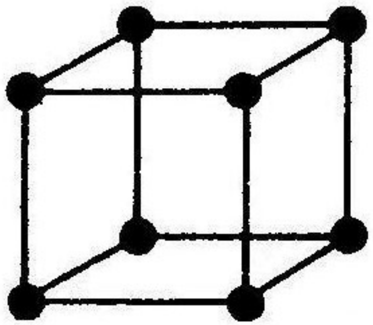
Kemény-Deák:Kísérletek tervezése és értékelése 2002 Műszaki Könyvkiadó

b) $\hat{Y}_2 = 25 - 3x_1 + 6x_2 + 4x_1x_2$

és így tovább …

$$y = b_0 + b_1*x_1 + b_2*x_2 + b_3*x_3 + b_{12}*x_1*x_2 + b_{13}*x_1*x_3 + b_{23}*x_2*x_3 + b_{123}*x_1*x_2*x_3$$

	x0	x1	x2	x3	x1*x2	x1*x3	x2*x3	x1*x2*x3
	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
X =	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1



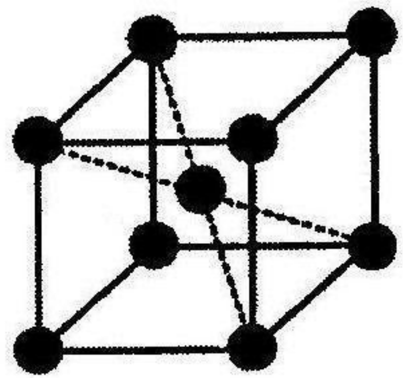
N faktor 2 szinten 2^n beállítás (hiperkocka)
N faktor 5 szinten 5^n beállítás

Csak 2 szint, de elviselhető számú kísérleti beállítás + kölcsönhatások megismerése.

n	2^n	5^n
1	2	5
2	4	25
3	8	125
4	16	625
5	32	3125

Szignifikánsak-e az együtthatók?

- Ismernünk kell a mérési adatok (y) szórását (s_y)
  minden pontban azonos számú ismétlés
  vagy a középpontban ismételt mérések



a középpont koordinátái:

x1	x2	x3
0	0	0

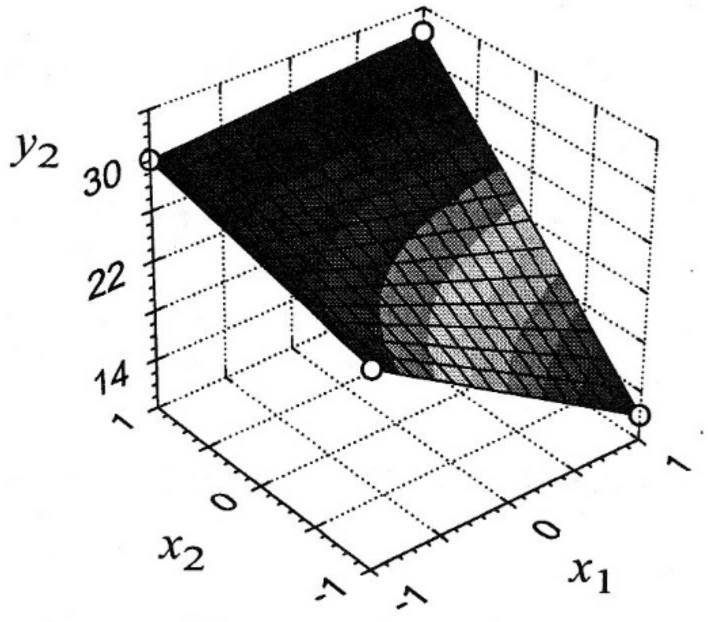
Ha $b_i > t^*s(b_i)$ akkor szignifikáns

- Számolás az előző példa alapján:

y01	y02	y03
25	25	26

- $s_y^2 = 0{,}333$
- $s(b_i)^2 = s_y^2/4 = 0{,}0833$
- $s(b_i) = 0{,}289$
- $t_{5\%,2} = 4{,}3$
- $t_{5\%,2} {}^*s(b_i) = 1{,}243$

Tehát mind a 4 paraméter szignifikáns



b) $\hat{Y}_2 = 25 - 3x_1 + 6x_2 + 4x_1x_2$

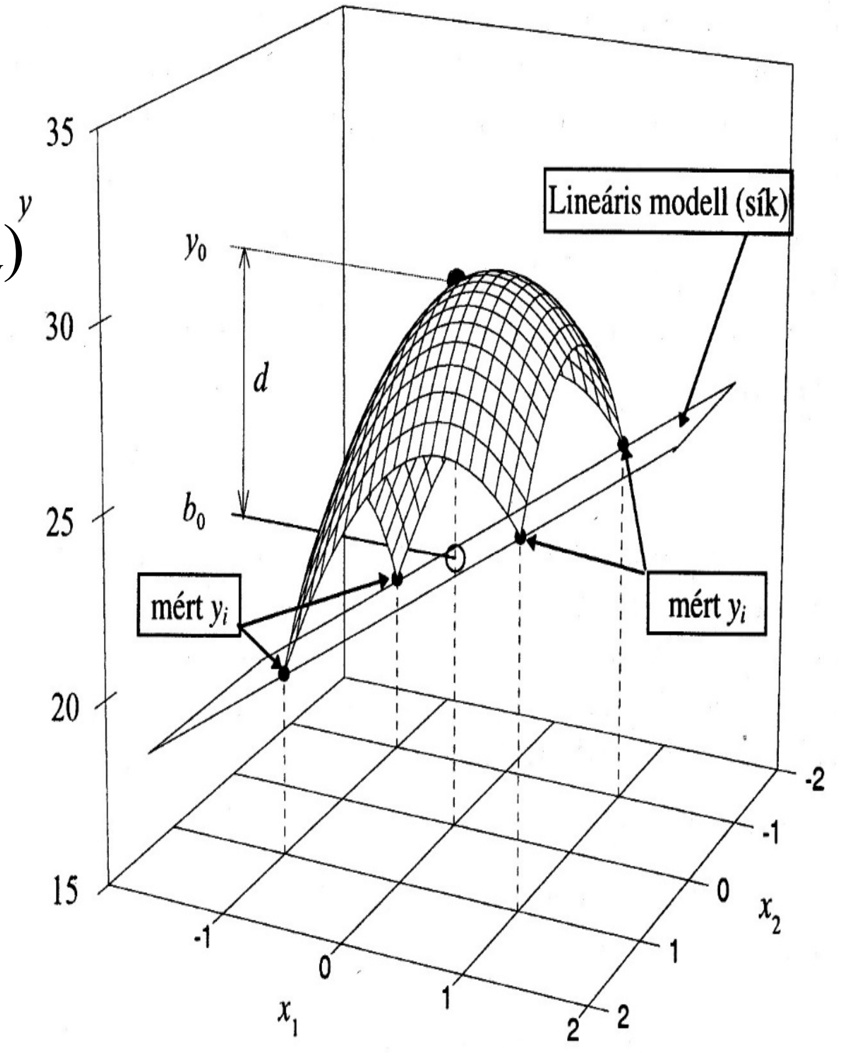
Kemény-Deák:Kísérletek tervezése és értékelése 2002 Műszaki Könyvkiadó

Adekvát-e a lineáris modell?

- Ismernünk kell a középpontban mért
  és számított adat eltérését (d),
- valamint a mérési adatok szórását (s_y)

Ha d < t*s(d) akkor nem szignifikáns az eltérés – adekvát a lineáris modell

- Számolás az előző példa alapján:
  - $d = 25{,}33 – 25 = 0{,}33$
  - $s_y^2 = 0{,}333$
  - $s_d^2 = s_y^2 * (1/4+1/3) = 0{,}1943$
    par.szám = 4; ism.szám = 3
    - $s_d = 0{,}441$
    - $t_{5\%,2} = 4{,}3$
    - $t_{5\%,2} * s_d = 1{,}896$



20-8. ábra. A 2^2 terv centrumában végzett mérések átlagának eltérése a lineáris modell b_0 konstansától: a modell nem adekvát

Mivel a d = 0,33 kisebb, mint az 1,896,
a lineáris modell adekvát.

Kemény-Deák:Kísérletek tervezése és értékelése 2002 Műszaki Könyvkiadó